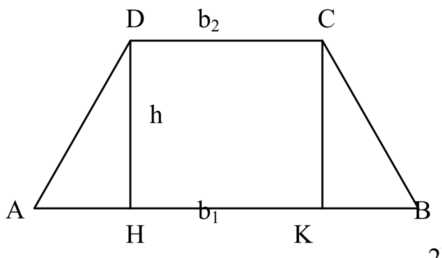
Questionario

Quesito 1

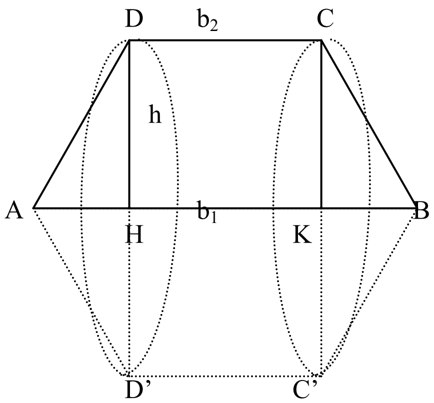
Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto fra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima attorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

Soluzione

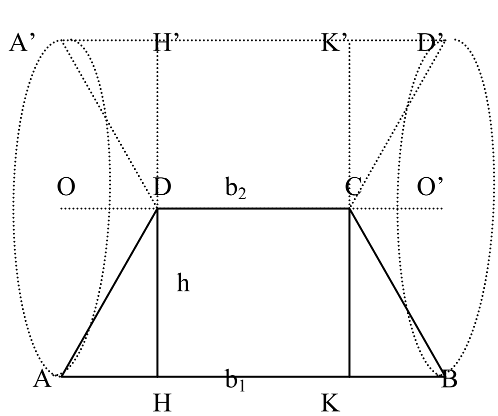


$$\frac{b_1}{b_2} = 4$$

1) Rotazione del trapezio intorno alla base maggiore AB



2) Rotazione del trapezio intorno alla base minore DC



$$V_1 = V_{cilindro}(DD'C'C) + 2V_{cono}(ADD')$$

$$V_1 = \pi h^2 b_2 + 2\frac{\pi h^2}{3} \cdot \frac{b_1 - b_2}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{\pi h^2}{3}(2b_2 + b_1)$$

e

$$V_2 = V_{cilindro}(HKK'H') - 2V_{cono}(ADA')$$

$$V_2 = \pi h^2 b_1 - 2\frac{\pi h^2}{3} \cdot \frac{b_1 - b_2}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{\pi h^2}{3}\left(2b_1 + b_2\right)$$

Si ha:

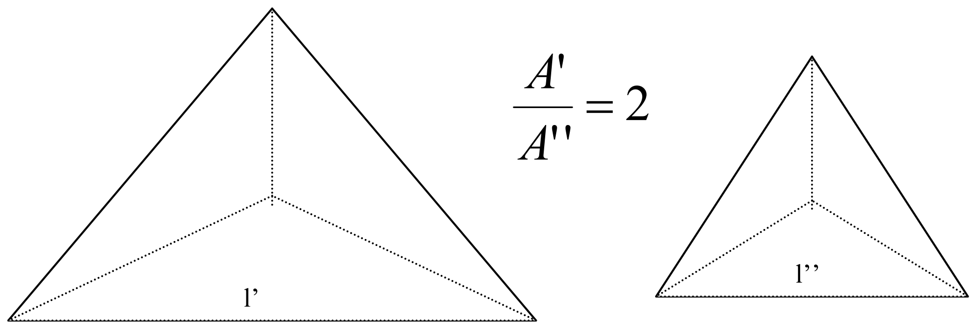
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2b_2 + b_1}{2b_1 + b_2} \xrightarrow{b_1 = 4b_2} \frac{V_1}{V_2} = \frac{2b_2 + 4b_2}{8b_2 + b_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Quindi il rapporto tra i due volumi é: $\frac{2}{3}$

Quesito 2

Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A" e volumi V' e V". Si sa che A'/A"=2. Calcolare il valore del rapporto V'/V".

Soluzione



$$\frac{A'}{A''} = 2$$

L'area del tetraedro regolare è: $A = \sqrt{3}l^2$

Il volume del tetraedro regolare è: $V = \frac{\sqrt{3}}{12}l^3$

Si ha che:

$$\begin{cases} A' = \sqrt{3}l'^2 \\ A'' = \sqrt{3}l''^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A'}{A''} = \frac{l'^2}{l''^2} = \left(\frac{l'}{l''}\right)^2 = 2 \Rightarrow l' = \sqrt{2}l''$$

$$\begin{cases} V' = \sqrt{3}l'^3 \\ V'' = \sqrt{3}l''^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{V'}{V''} = \frac{l'^3}{l''^3} = \left(\frac{l'}{l''}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{V'}{V''} = \left(\frac{\sqrt{2}l''}{l''}\right)^3 = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

Quindi il valore del rapporto tra i due volumi è:

$$\frac{V'}{V''} = 2\sqrt{2}$$

Quesito 3

Considerati i numeri reali a,b,c,d - comunque scelti - se a>b e c>d allora

A. a+d>b+c
B. a-d>b-c
C. ad>bc
D. a/d > b/c
Una sola alternativa è corretta : individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

Soluzione

L'alternativa corretta e la B.

Dimostrazione

Essendo

$$a > b \Rightarrow \exists x > 0 \; t.c. \; a = b + x$$
$$c > d \Rightarrow \exists y > 0 \; t.c. \; c = d + y$$

quindi :

$$a - d > b - c \Rightarrow (b + x) - d > b - (d + y) \Leftrightarrow x > -y$$

che è sempre verificata, essendo x>0 è y>0.

Quesito 4

Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta

Soluzione

Siano

$$a, b \in \Re_0^+ \quad con \quad a \neq b$$

La media aritmetica M e la media geometrica G sono definite nel seguente modo:

$$M = \frac{a + b}{2}$$
$$G = \sqrt{a \cdot b}$$

dimostriamo che:

$$\sqrt{a \cdot b} < \frac{a + b}{2}$$

elevando al quadrato si ottiene:

$$a \cdot b < \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \Rightarrow \frac{4ab - a^2 - 2ab - b^2}{4} < 0 \Rightarrow (a-b)^2 > 0$$

che è sempre verificata $\forall a, b \in \Re_0^+ \quad con \quad a \neq b$.

Se **a = b** la media aritmetica è uguale alla media geometrica.

<u>Quesito 5</u>

Determinare se esistono i numeri a, b in modo che la seguente relazione sia un'identità:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

Soluzione

Dall'eguaglianza proposta si ottiene:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a(x+1) + b(x-3)}{x^2 - 2x - 3}$$

supposto $x \neq 3$ e $x \neq -1$; dalla relazione precedente si ottiene: $(a+b)x+a-3b=1$
per il *principio di identità dei polinomi* si ha:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

<u>Quesito 6</u>

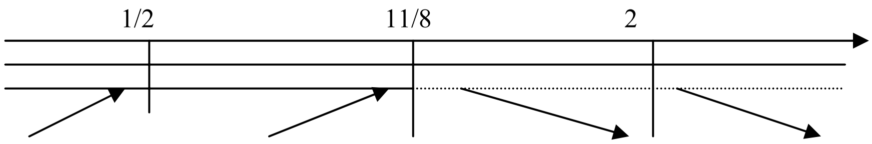
Si consideri la funzione $f(x) = (2x-1)^7 (4-2x)^5$. *Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo* $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

Soluzione

Per il teorema di Weierstass, essendo f(x) continua nell'intervallo chiuso e limitato, $\left[\frac{1}{2};2\right]$ ammette valore minimo e massimo assoluti.
Dallo studio del segno della derivata prima:

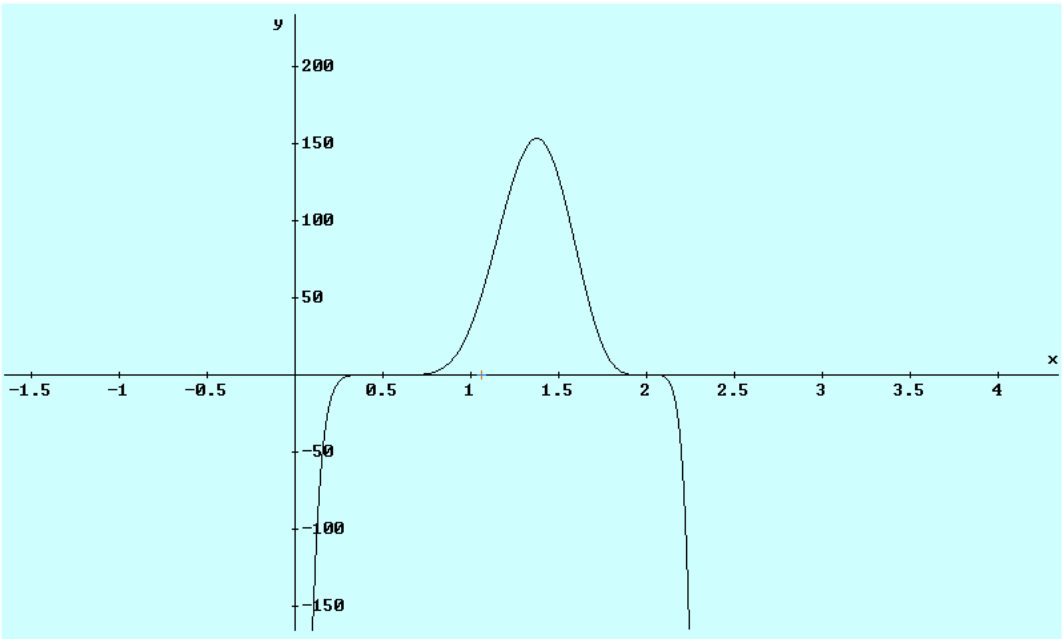
$$f'(x) = 2(2x-1)^6 (4-2x)^4 (33-24x)$$

si ottiene:



I punti ½ e 2 rappresentano due punti di flesso e nell'intervallo considerato rappresentano due punti di minimo assoluto [f(1/2)=f(2)=0].

Nel punto di ascissa x=11/8 la funzione presenta un punto di massimo assoluto.



Quesito 7

Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione f(x) tale che $f(x)=\int_x^{x+1}\ln t\,dt,\quad \text{con } x>0$.

Soluzione

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene :

$$f'(x)=[\ln t]_x^{x+1}=\ln\frac{x+1}{x}$$

Procedendo con il calcolo diretto ed integrando per parti, si ottiene lo stesso risultato.
Infatti:

$$f(x)=[x\ln x-x]_x^{x+1}=(x+1)\ln(x+1)-(x+1)-x\ln x+x$$

cioè

$$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x-1$$

quindi

$$f'(x)=\ln(x+1)+1-\ln x-1=\ln\frac{x+1}{x}$$

Quesito 8

La funzione reale di variabile reale f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1,3] e derivabile nell'intervallo aperto]1,3[. Si sa che f(1)=1 e inoltre $0 \le f'(x) \le 2$ *per ogni x nell'intervallo]1,3[. Spiegare in maniera esauriente perché risulta* $1 \le f(3) \le 5$

Soluzione

Ipotesi

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \quad \textit{continua} \quad \textit{in} \quad [1;3] \\ f(x) \quad \textit{derivabile} \quad \textit{in} \quad]1;3[\\ f(1) = 1 \\ 0 \le f'(x) \le 2 \quad \forall x \in]1;3[\end{array}\right\} \Rightarrow (1 \le f(3) \le 5$$

Dimostrazione

Si può applicare il teorema di Lagrange ottenendo

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c)$$

con c opportuno.

Poiché **f(1)=1** si ha **f(3)=1+2f'(c).**

$$\begin{array}{l} \textit{Poiché } 0 \le f'(c) \le 2 \\ \textit{si ha} \\ f'(c) = 0 \Rightarrow f(3) = 1 \\ f'(c) = 2 \Rightarrow f(3) = 5 \\ \textit{quindi} \\ 1 \le f(3) \le 5 \end{array}$$

<u>Quesito 9</u>

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$$

Tale luogo è costituito da:

A) *un punto;*
B) *due punti;*
C) *infiniti punti;*
D) *nessun punto;*

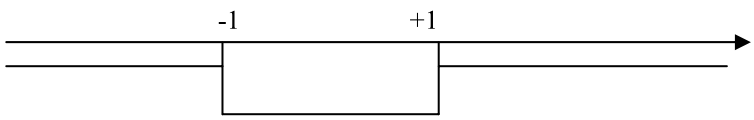
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

L'alternativa giusta è la B.

La funzione proposta è costituita dalla somma di due radici con indice pari, quindi il campo di esistenza è dato dalla soluzione del sistema .

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \quad x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Quindi la funzione è definita solo per **x=±1**
Il luogo geometrico è costituito dai due punti **P(+1;0) P(-1;0)**

Quesito 10

La funzione reale di variabile reale f(x), continua per ogni x, è tale che

$$\int_0^2 f(x)dx = a \qquad \int_0^6 f(x)dx = b$$

dove a,b sono numeri reali. Determinare, se esistono, i valori a,b per cui risulta

$$\int_0^3 f(2x)dx = \ln 2 \qquad \int_1^3 f(2x) = \ln 4$$

Soluzione

Ponendo **2x=t** si ha :

$$\begin{aligned} &dx = \frac{dt}{2} \\ &per \quad x \to 0 \quad \Rightarrow t \to 0 \\ &per \quad x \to 1 \quad \Rightarrow t \to 2 \\ &per \quad x \to 3 \quad \Rightarrow t \to 6 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^3 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{2}b = \ln 2 \Rightarrow b = 2\ln 2 \\ &\int_1^3 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}(b-a) = \ln 4 \Rightarrow b - a = 2\ln 4 \end{aligned}\right| \Rightarrow a = 2\ln 2 - 2\ln 4$$

In conclusione

$$\begin{cases} a = -\ln 4 \\ b = \ln 4 \end{cases}$$