Maturità Scientifica, Corso di ordinamento, Sessione Ordinaria 2001-2002

Problema 1

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata la curva k di equazione

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano y>0 e per quali nel semipiano y<0.
b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari)*.
c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
d) determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.
e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione *f(x)* assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \le x \le 0$

Soluzione

Il dominio della funzione $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$ è $\boxed{D_f = \{x \in R \setminus x \neq -\sqrt[3]{2}\}}$

Quesito a

Per determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano y>0 e per quali nel semipiano y<0, studia il segno della disequazione

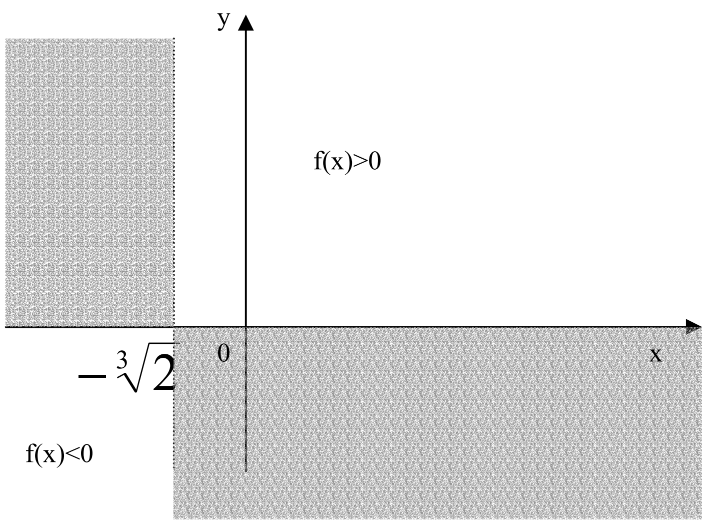
$$\frac{x^2+2}{x^3+2} > 0$$

siccome il numeratore è sempre positivo, cioè $x^2 + 2 > 0 \quad \forall x \in R$, si ha

$$\frac{x^2+2}{x^3+2} > 0 \Rightarrow x^3 + 2 > 0 \Rightarrow x > -\sqrt[3]{2}$$

quindi

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) > 0 \Rightarrow x > -\sqrt[3]{2} \\ \\ f(x) < 0 \Rightarrow x < -\sqrt[3]{2} \end{array}}$$



Punto b

L'equazione della parabola, passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, è del tipo $y = ax^2 + bx$.

Imponi il passaggio per il punto P(-1;f(-1)), cioè P(-1;3), ottieni
3=a-b⇒a=3+b e l'equazione della parabola diventa:

$y = (b+3)x^2 + bx$

Siccome le rette tangenti alla curva assegnata e alla parabola sono perpendicolari nel punto P(-1,3); per determinare b devi imporre la condizione di perpendicolarità m·m'=-1; dove m è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva k nel punto P ed m' è il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola nello stesso punto.

Tenendo conto che la derivata prima rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto considerato hai

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+2) - 3x^2(x^2+2)}{\left(x^3+2\right)^2} = \frac{-x(x^3+6x-4)}{\left(x^3+2\right)^2} \Rightarrow m = f'(-1) = -11$$

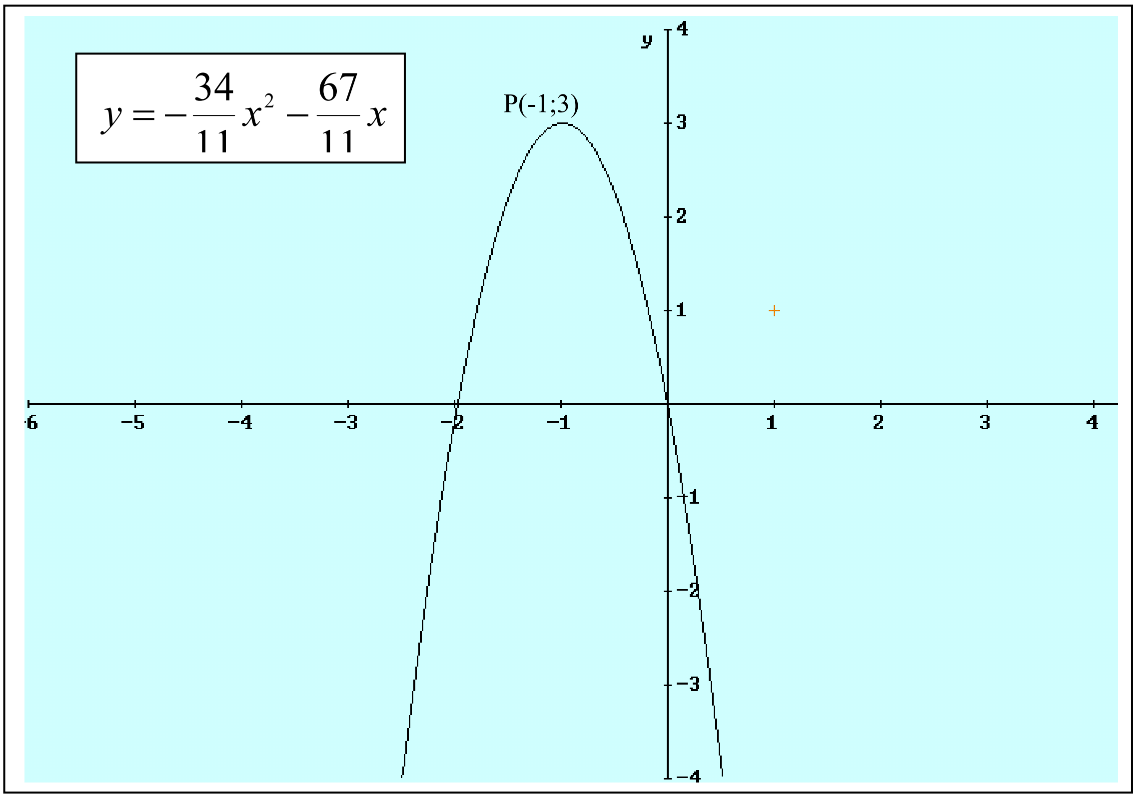
$$y' = 2(b+3)x + b \Rightarrow m' = y'(-1) = -b-6$$

La condizione:

$$m \cdot m' = 1 \Rightarrow (-b-6)(-11) = -1 \Rightarrow b = -\frac{67}{11}$$

quindi l'equazione della parabola richiesta è:

$$\boxed{y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x}$$



<u>Punto c</u>

L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione f(x) nel punto $P(x_0;y_0)$ è data da

$$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$$

Quindi la retta tangente alla curva k nel punto P(-1;3) ha equazione y-3=-11(x+1)

Per trovare le intersezioni della retta con la curva k, bisogna risolvere il sistema, formato dalle due equazioni $\begin{cases} y = 3-11(x+1) \\ y = \dfrac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases}$

Sostituendo si ottiene $\begin{cases} y = -11x-8 \\ 11x^4+8x^3+x^2+22x+18=0 \end{cases}$

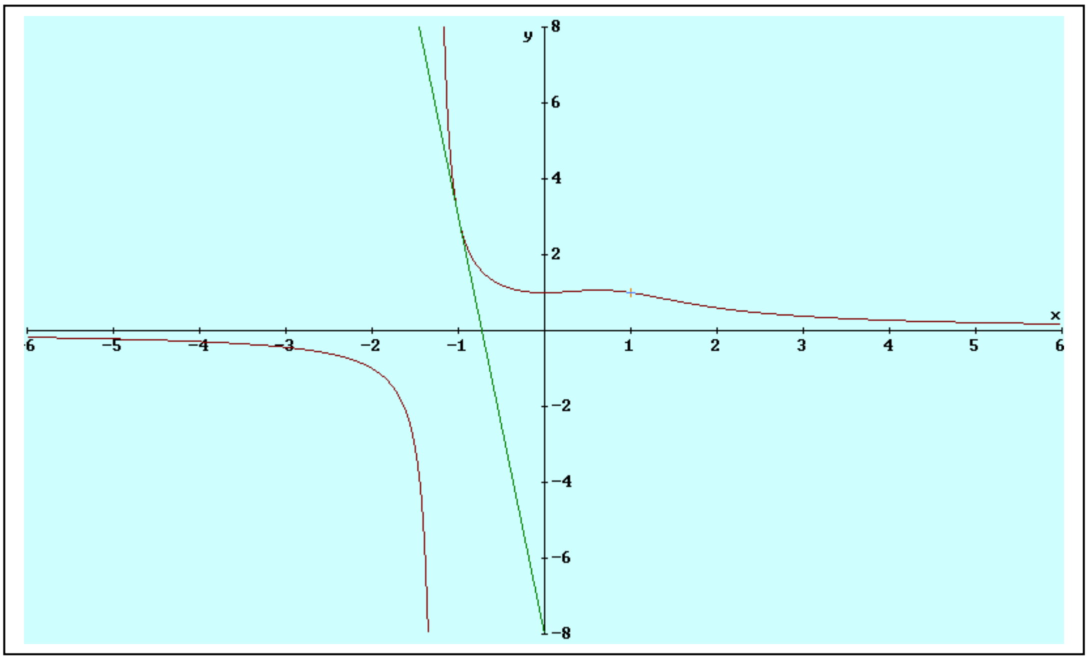
Poiché la retta è tangente nel punto di ascissa –1, x = -1 è uno zero dell'equazione ottenuta e l'equazione si può abbassare di grado, con la regola di Ruffini.

	11	8	1	22	18
-1		-11	+3	-4	-18
	11	-3	+4	+18	0

	11	-3	4	18
-1		-11	+14	-18
	11	-14	+18	0

quindi: $\begin{cases} y = -11x-8 \\ (x+1)^2\left(11x^2-14x+18\right)=0 \end{cases}$

Siccome l'equazione $11x^2-14x+18=0$ non ammette soluzioni reali, perché Δ<0, x=-1 è l'unica intersezione (doppia) tra la curva e la retta tangente.



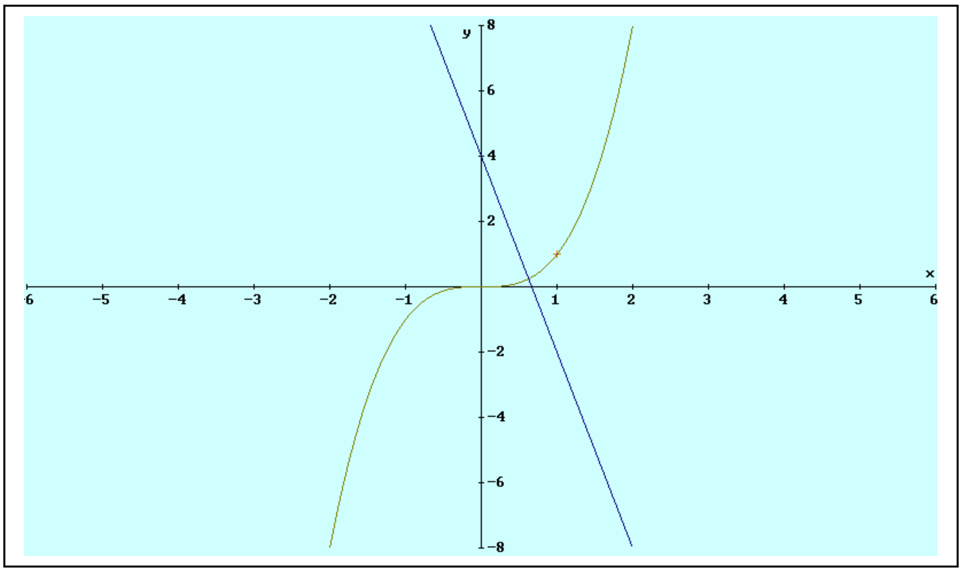
Punto d

Per determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x, basta trovare i punti stazionari (cioè i punti di massimo o di minimo). La condizione necessaria affinché un punto sia di estremo relativo è che la derivata prima sia uguale a zero.
Imponendo tale condizione si ottiene:

$$f'(x) == \frac{-x(x^3+6x-4)}{\left(x^3+2\right)^2} = 0 \Rightarrow x=0 \quad o \quad (x^3+6x-4)=0$$

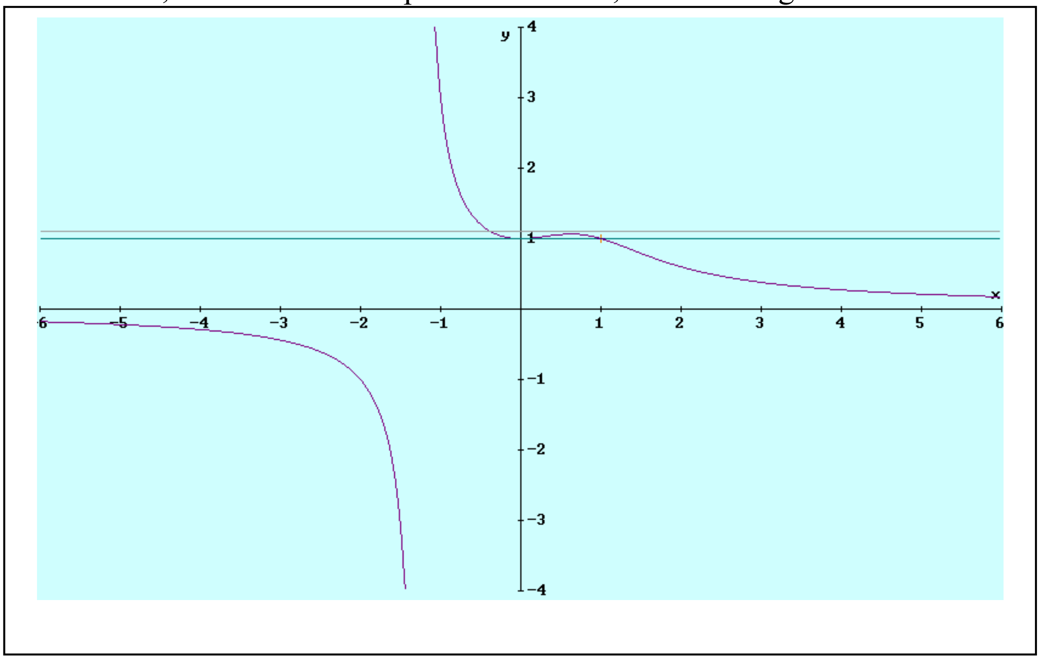
L'equazione $x^3+6x-4=0$ non si può abbassare di grado con la regola di Ruffini. Si possono trovare le soluzioni approssimate con il metodo grafico, cercando i valori di x per i quali $x^3=4-6x$, cioè risolvendo graficamente il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4-6x \end{cases}$$



dal grafico si vede che esiste una sola intersezione x=α, Quindi l'equazione ammette una soluzione x=α, con $0 < \alpha < \frac{2}{3}$.

In definitiva, la curva k ha due punti x=0 e x=α, in cui la tangente è orizzontale



Punto e

L'enunciato del teorema di Lagrange o del valor medio è il seguente

Sia $f(x):[a,b]\rightarrow\Re$

Se:

1) f(x) continua in [a,b]*(intervallo chiuso)*

2) f(x) derivabile in (a, b)*(intervallo aperto)* $\Rightarrow$ $\exists c\in(a,b)$ tale che $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

La funzione non soddisfa la prima ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $-\sqrt{2}\le x\le 0$ perché nel punto $x=-\sqrt[3]{2}$ la funzione non è definita e quindi non è continua.