Questionario

Quesito 1

Indicata con *f(x)* una funzione reale di variabile reale, si sa che *f(x)* $\to l$ per $x \to a$, essendo *l* ed *a* numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che *f(a)* = *l* e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

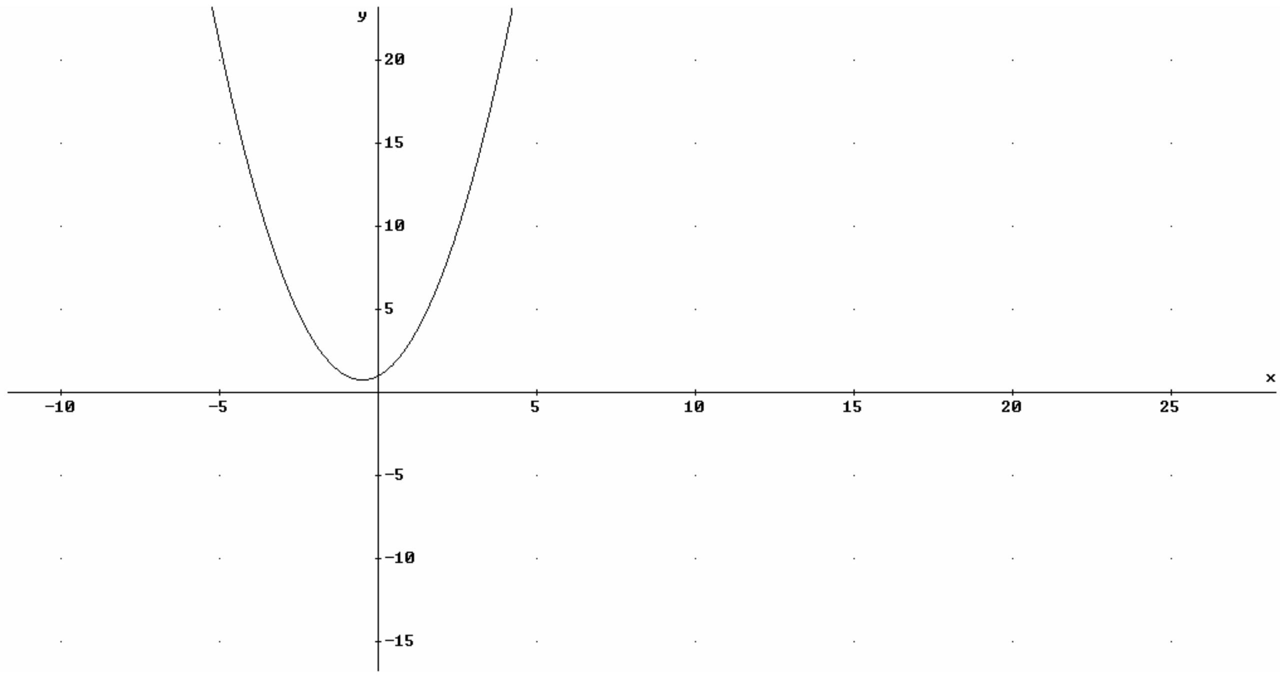
Le condizioni date nel testo del quesito non sono sufficienti per concludere che *f(a)* = *l*, perché manca l'ipotesi della continuità della funzione.

$f(x)$ è continua nel punto di ascissa a $\xleftrightarrow{Def.} \left\{ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \right.$

Consideriamo come esempio la seguente funzione: $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$

La funzione pur non essendo definita nel punto di ascissa x = 1, ammette limite finito, infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3$$



Se consideriamo invece la seguente funzione: $f(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$

La funzione è definita nel punto di ascissa x = 0 ma in tale punto ammette un valore del limite diverso dal valore che assume nel punto. Infatti:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \quad \neq \quad f(0) = 0$$

Quesito 2

Sia *f(x)* una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che *f(0)=2.* Calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x}$$

dove *e* è la base dei logaritmi naturali.

Soluzione

Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applicando il teorema di De L'Hôpital e tenendo conto del teorema di Torricelli-Barrow si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2e^x+2xe^x}=\frac{f(0)}{2e^0}=\frac{2}{2}=1.$$

Teorema di De L'Hôpital

Se le funzioni f(x) e g(x) sono derivabili in un intorno di un punto c, escluso al più il punto c stesso, se $g'(x)\neq 0 \forall x\in I(c)-\{c\}$, $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0$,

allora $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Teorema di Torricelli-Barrow

La derivata della funzione integrale in un punto è uguale al valore che la funzione integrando assume in quel punto: $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$.

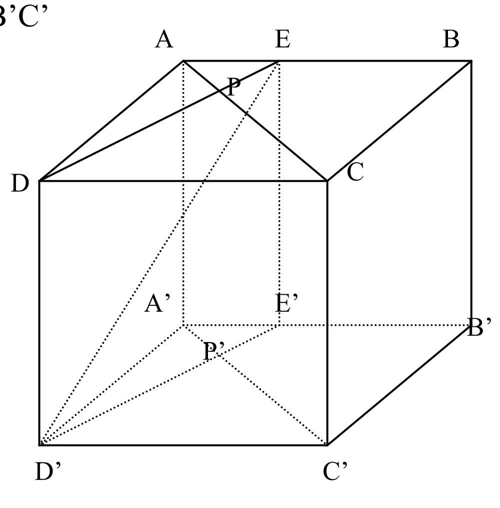
Quesito 3

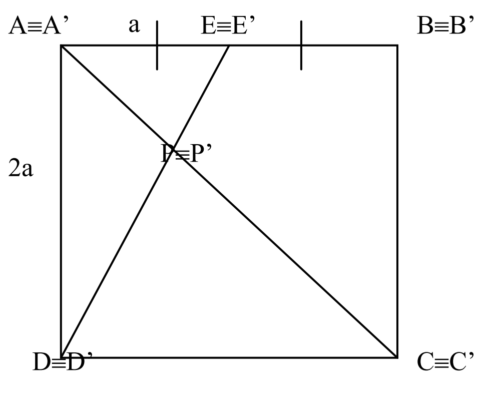
Si consideri il cubo di spigoli AA' , BB' , CC' , DD' , in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani ACC'A' e D'DE dividono il cubo in quattro parti.

Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

Soluzione

Il problema richiede la dimostrazione che il prisma AEPP'A'E' è la quinta parte del prisma EBCPP'E'B'C'





La seconda figura rappresenta la proiezione ortogonale del cubo ABCDD'A'B'C' di spigolo *2a* sul piano della faccia A'B'C'D'.
Il cubo risulta suddiviso dai due piani in quattro prismi che hanno la stessa altezza, quindi il rapporto tra i loro volumi è uguale al rapporto fra le loro aree di base.

E' sufficiente quindi dimostrare che il triangolo APE deve avere area pari a $\frac{1}{5}$ di quella del quadrilatero PCBE: $A_{APE} = \frac{1}{5} A_{PCBE}$.

Ciò significa che tale triangolo deve avere area pari a $\frac{1}{12}$ di quella del quadrato, cioè:

$$A_{APE} = \frac{1}{12} A_{ABCD}$$

Dimostrazione

Applicando il teorema della bisettrice al triangolo AED risulta $\overline{PE} = \frac{1}{2}\overline{PD}$.

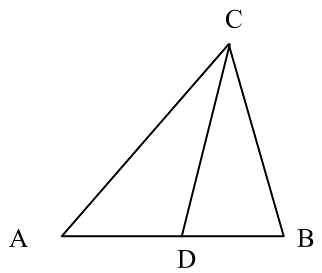
Quindi $A_{APE} = \frac{1}{3} A_{AED}$, infatti i triangoli APE e AED hanno la stessa altezza mentre la base del primo è $\frac{1}{3}$ della base del secondo.

Inoltre $A_{AED} = \frac{1}{4} A_{ABCD}$, infatti i triangoli AED e ABC hanno la stessa altezza mentre la base del primo è $\frac{1}{2}$ della base del secondo.

In conclusione $A_{APE} = \frac{1}{12} A_{ABCD}$.

Teorema della bisettrice

In un triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.



AC:BC=AD:DB

Quesito 4

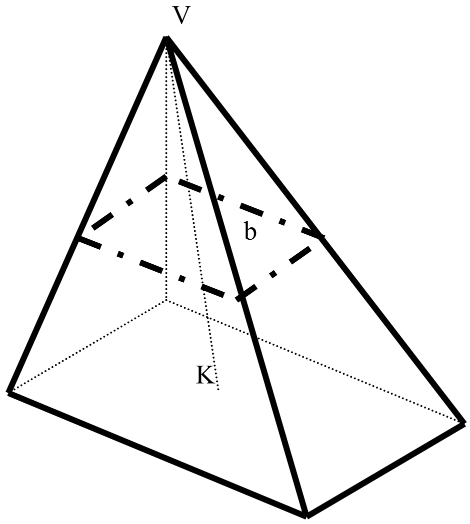
Un tronco di piramide ha le basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume è espresso dalla seguente formula:

$$V=\frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{Bb}\right)$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

Soluzione

Ai fini della dimostrazione si ammette nota la formula per il calcolo del volume della piramide.



Il tronco di piramide di basi B e b ed altezza h, si può ottenere sezionando la piramide di base B con un piano normale alla sua altezza $\overline{VK}=H$.
Si ottengono due piramidi simili,
quella iniziale di altezza H e base B, l'altra di altezza H-h e base b.

Poiché le basi stanno tra loro come il quadrato delle rispettive altezze si ha $\frac{B}{b}=\frac{H^2}{\left(H-h\right)^2}$.

Da cui $\left(B-b\right)H^2-2hBH+Bh^2=0$, risolvendo l'equazione si ha:

$$\mathrm{H}_{1/2}=\frac{hB\pm\sqrt{h^2B^2-h^2B^2+bBh^2}}{B-b}=h\cdot\frac{B\pm\sqrt{bB}}{B-b}$$

Escludendo la soluzione negativa, si ha: $\mathrm{H}=h\cdot\frac{B+\sqrt{bB}}{B-b}$

Per trovare il volume del tronco di cono si deve calcolare la differenza tra i volumi delle due piramidi: $V=\frac{1}{3}BH-\frac{1}{3}b(H-h)=\frac{1}{3}\left(BH-bH+bh\right)=\frac{1}{3}\left[\left(B-b\right)H+bh\right]$

Sostituendo il valore trovato di H: $V=\frac{1}{3}\left[\left(B-b\right)h\frac{B+\sqrt{bB}}{B-b}+bh\right]=\frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{bB}\right)$

Quesito 5

Sia *f(x)* una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo [a;b] e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti *f'(x)* = 0. Dimostrare che *f(x)* è costante in quell'intervallo.

Soluzione

Si può dimostrare la tesi in due modi:

1° Dimostrazione per assurdo
Se la funzione fosse non costante sarebbe localmente crescente o decrescente in alcuni punti dell'intervallo ed in tali punti avrebbe la derivata prima non nulla, contro l'ipotesi.

2° Dimostrazione diretta
Siano
$x_1 \in [a;b],\ x_2 \in [a;b]\ con \quad x_1 < x_2$
per il Teorema di Lagrange, esiste un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che
$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$.
Per ipotesi f'(x) = 0 per ogni x appartenente a tale intervallo, quindi anche f'(c) = 0, da cui
$f(x_1) - f(x_2) = 0 \cdot (x_1 - x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
Siccome questo accade per ogni coppia di punti x_1 e x_2 dell'intervallo [a,b], la funzione f(x) è costante in quell'intervallo.

<u>Quesito 6</u>
Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n,k sono numeri naturali qualsiasi con n>k>0.

Soluzione
Per definizione il coefficiente binomiale è dato dalla formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

con

$$k! = k(k-1)(k-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$$

quindi

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-1-k+1)}{k!} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-1-k+1+1)}{(k-1)!} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{(k-1)!}$$

da cui

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{(k-1)!} =$$

il m.c.m. tra $k!\ e\ (k-1)!\ è\ k!$

$$= \frac{(n-1)(n-2)...(n-k) + k(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1) \cdot [(n-k)+k]}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Quesito 7

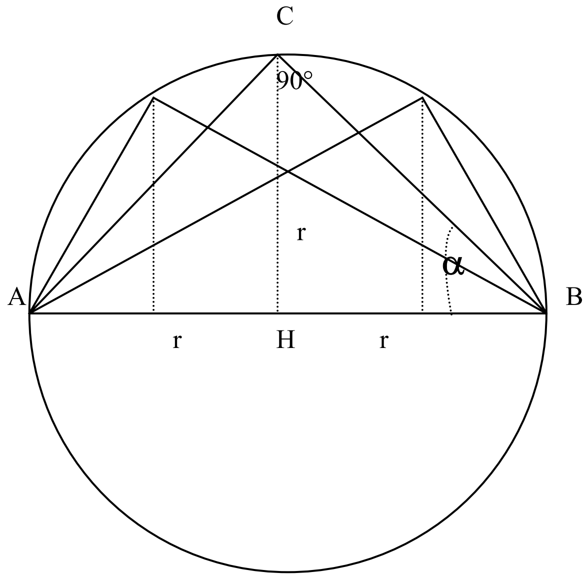
Per i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha

A. Area massima e perimetro massimo
B. Area massima e perimetro minimo
C. Area minima e perimetro massimo
D. Area minima e perimetro minimo

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un 'esauriente spiegazione

Soluzione

La risposta corretta è la A.
Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo e l'ipotenusa coincide con il diametro 2r.
Considerando l'ipotenusa come base del triangolo ABC,
l'area è $A_{ABC} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}$ essa risulta massima quando l'altezza CH è massima. Ciò si verifica quando CH coincide con il raggio r.
In questo caso il triangolo è isoscele $\overline{AC} = \overline{AB}$
Considerato il triangolo rettangolo ABC si ha:



$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot sen\, \alpha = 2r \cdot sen\, \alpha$

$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \cos \alpha = 2r \cdot \cos \alpha$

Indicando con P(α) il perimetro del triangolo ABC si ha:

P(α)=2r $+ 2r \cdot sen\, \alpha + 2r \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

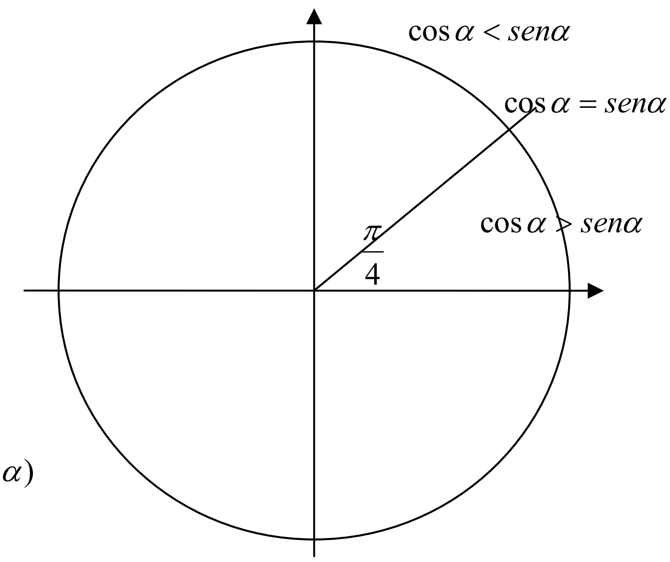
P(α)=2r $+ 2r \cdot \left(sen\, \alpha + \cos \alpha \right)$

derivando si ottiene: P'(α)=$2r \cdot \left(\cos \alpha - sen\, \alpha \right)$

Dallo studio della derivata prima, tenendo conto che

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ si ottiene:

$P'(\alpha) \geq 0 \Rightarrow \cos\alpha - sen\alpha \geq 0 \Rightarrow \cos\alpha \geq sen\alpha$



$P'(\alpha) > 0 \Rightarrow 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4} \quad \left[P(\alpha)\ crescente \right]$

$P'(\alpha) < 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \quad \left[P(\alpha)\ decrescente \right]$

$P'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

quindi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ è un punto di massimo assoluto per P(α)

Pertanto i perimetro del triangolo rettangolo ABC
risulta massimo quando $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ e quindi quando il triangolo è isoscele.

<u>Quesito 8</u>

Considerata la funzione $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$ dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

Soluzione

La funzione $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$ è un polinomio di terzo grado, è continua e derivabile per ogni x appartenente ai reali. La sua derivata è $f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$.

Per vedere se la funzione presenta dei massimi o dei minimi bisogna studiare gli zeri della derivata prima $3ax^2 + 4ax^2 - 3 = 0$.

Primo caso

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a > 0 \Rightarrow a < -\frac{9}{4} \quad o \quad a > 0$$

L'equazione ammette due soluzioni reali e distinte; la funzione ammette un massimo e un minimo.

Secondo caso

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a < 0 \Rightarrow -\frac{9}{4} \quad < a < 0$$

L'equazione non ammette soluzioni reali; la funzione non ammette estremanti.

Terzo caso

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a = 0 \Rightarrow a = -\frac{9}{4} \quad o \quad a = 0$$

L'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti; la funzione è sempre decrescente.

<u>Quesito 9</u>

Il limite della funzione $\frac{sen\ x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

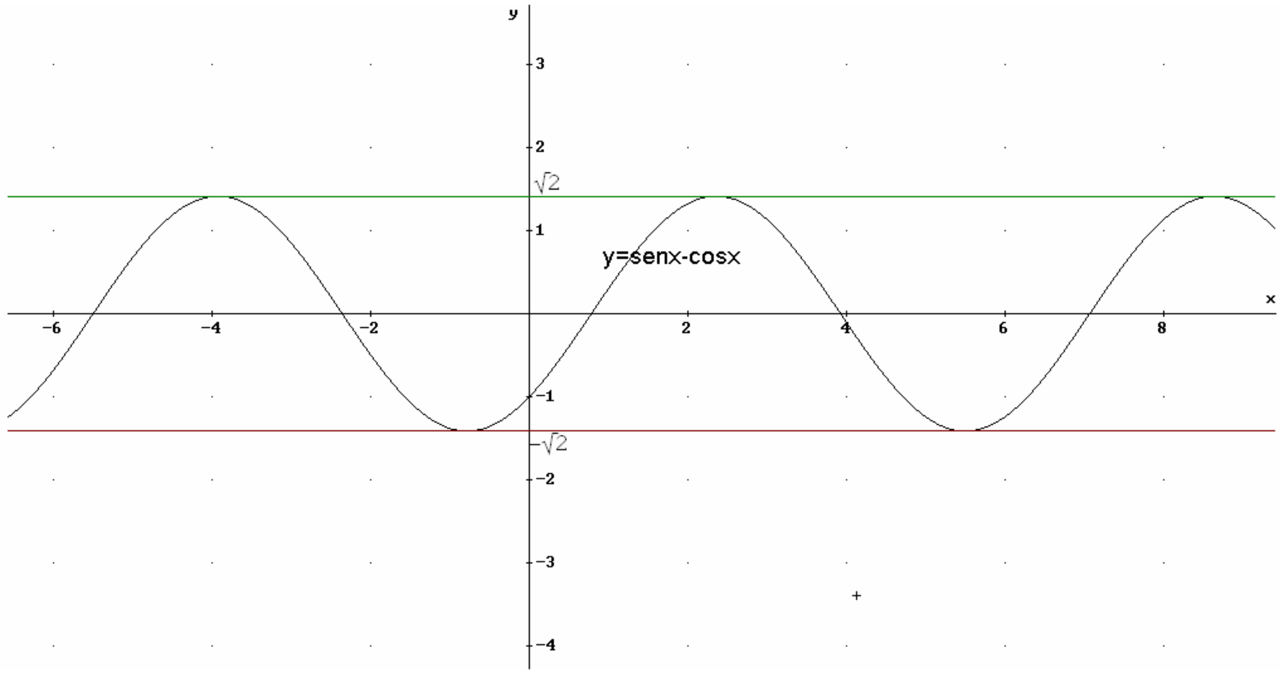
A. è uguale a 0
B. è uguale a 1
C. è un valore diverso dai due precedenti
D. non è determinato

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Soluzione

La risposta esatta è la A.

Infatti, $\lim_{x \to +\infty} \frac{sen\ x - \cos x}{x}$ è dato dal rapporto tra una funzione limitata $-\sqrt{2} \le senx - \cos x \le \sqrt{2}$ e una funzione che tende a $+\infty$



Si può anche ragionare nel seguente modo:
tenendo conto che le funzioni sen x e cos x sono limitate, cioè:

$$-1 \le sen\ x \le 1$$
$$-1 \le \cos x \le 1$$

si ha :

$$-\frac{1}{x} \le \frac{sen\ x}{x} \le \frac{1}{x}$$
$$-\frac{1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{x}$$

Ma $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, per il teorema del confronto si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{sen\ x}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

In definitiva il limite proposto è $\lim_{x\to+\infty} \frac{sen\ x - \cos x}{x} = 0$

<u>Quesito 10</u>

Si consideri la funzione $\frac{x + sen\ x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolare il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L’Hôpital.

Soluzione

Il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+sen\,x}{x-\cos x}$ si può calcolare dividendo numeratore e denominatore per x, si ottiene: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+sen\,x}{x-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{sen\,x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}=1$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{sen\,x}{x}=0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$$

Il teorema di De L'Hôpital non si può applicare in quanto non è soddisfatta l'ipotesi che esista un intorno di $+\infty$ in cui la derivata prima del denominatore (y'=1+senx) non si annulli.
Infatti l'uguaglianza senx = -1 si verifica infinite volte nell'intorno di $+\infty$.