PROBLEMA 2

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

f) Dimostrare che il quadrilatero DENM è la quarta parte del triangolo ABC.

g) Ammesso che l'area del quadrilatero DENM sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre:
$\overline{AB} = 13a \quad e \quad \overline{BC} = 15a$,
verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

h) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b) ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

i) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

Soluzione

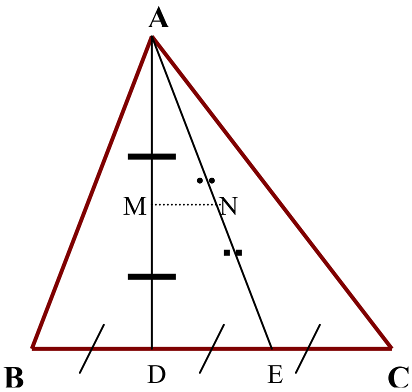
Punto a

Dimostrare che il quadrilatero DEMN è la quarta parte del triangolo ABC.

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$$

Siano M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.



Per una conseguenza del Teorema di Talete, "*in un triangolo il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato ed è isometrico alla sua metà*".

La lunghezza del segmento MN è pari, quindi, alla metà del segmento DE: $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{DE}$.

Inoltre il quadrilatero DENM è un trapezio essendo MN parallelo a DE.
L'area del trapezio DENM si può ottenere come differenza tra le aree dei triangoli ADE e AMN. I triangoli ABD, ADE, ed AEC hanno la stessa area, avendo la stessa altezza relativa alle basi BD, DE ed EC che sono congruenti per ipotesi.

Siccome $A_{ABC} = A_{ABD} + A_{ADE} + A_{AEC}$, si ha $A_{ADE} = \frac{1}{3} A_{ABC}$.
I triangoli AMN e ADE sono simili e hanno i lati in proporzione secondo il rapporto ½; di conseguenza le rispettive aree stanno tra loro secondo il rapporto $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
Concludendo:

$$A_{DEMN} = A_{ADE} - A_{AMN} = A_{ADE} - \frac{1}{4} A_{ADE} = \frac{3}{4} A_{ADE} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} A_{ABC} = \frac{1}{4} A_{ABC}$$

Cioè il quadrilatero DENM è la quarta parte del triangolo ABC.

<u>Punto b</u>

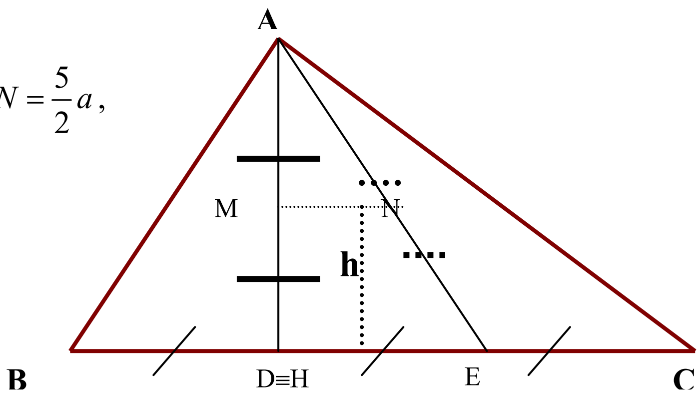
Ammesso che l'area del quadrilatero DENM sia $\frac{45}{2} a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre:

$$\overline{AB} = 13a \quad e \quad \overline{BC} = 15a,$$

verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

Per quanto già detto il quadrilatero DENM è un trapezio.
Per ipotesi, $A_{DENM} = \frac{45}{2} a^2$

E inoltre $\overline{BC} = 15a \rightarrow DE = 5a \rightarrow MN = \frac{5}{2} a$,



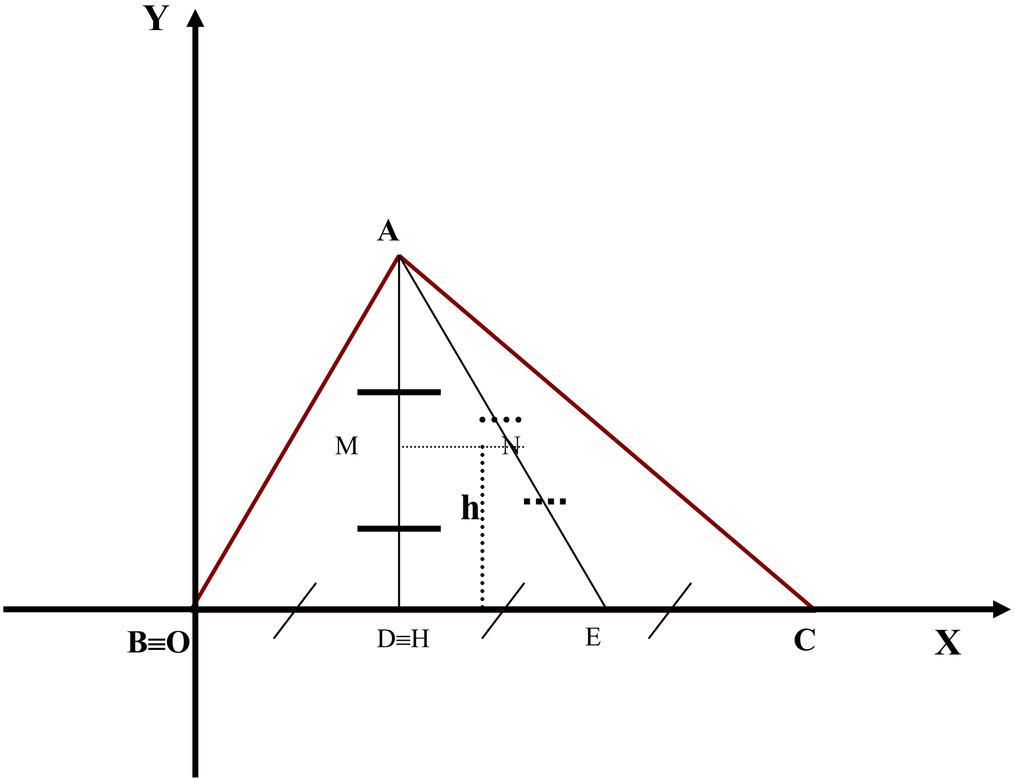
L'altezza h è uguale a $h = \frac{2 \cdot A_{DENM}}{\overline{DE} + \overline{MN}} = \frac{2 \cdot \frac{45}{2} a^2}{5a + \frac{5}{2} a} = \frac{90a^2}{15a} = 6a$

L'altezza del triangolo ABC uguale a *12a*.
Sia AH l'altezza del triangolo ABC, essendo l'angolo in B acuto, applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABH si ottiene $\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(13a)^2 - (12a)^2} = 5a$

Siccome anche $\overline{BD} = 5a$, il punto D coincide con il punto H e il triangolo ADE è rettangolo, di conseguenza anche il trapezio DENM è rettangolo.

Punto c

Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b) ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.



Si può porre il sistema di riferimento come in figura, con l'origine nel vertice B, il lato BC sull'asse delle ascisse, il vertice A nel primo quadrante e unità di misura u=a.
Con questa scelta si avrà:
B(0,0)
C(15,0)
D(5,0)
E(10,0)
Siccome

$$\overline{MD} = 6 \quad e \quad \overline{MN} = \frac{5}{2}$$

si ha:

$$M(5;6) \quad e \quad N\left(\frac{15}{2};6\right)$$

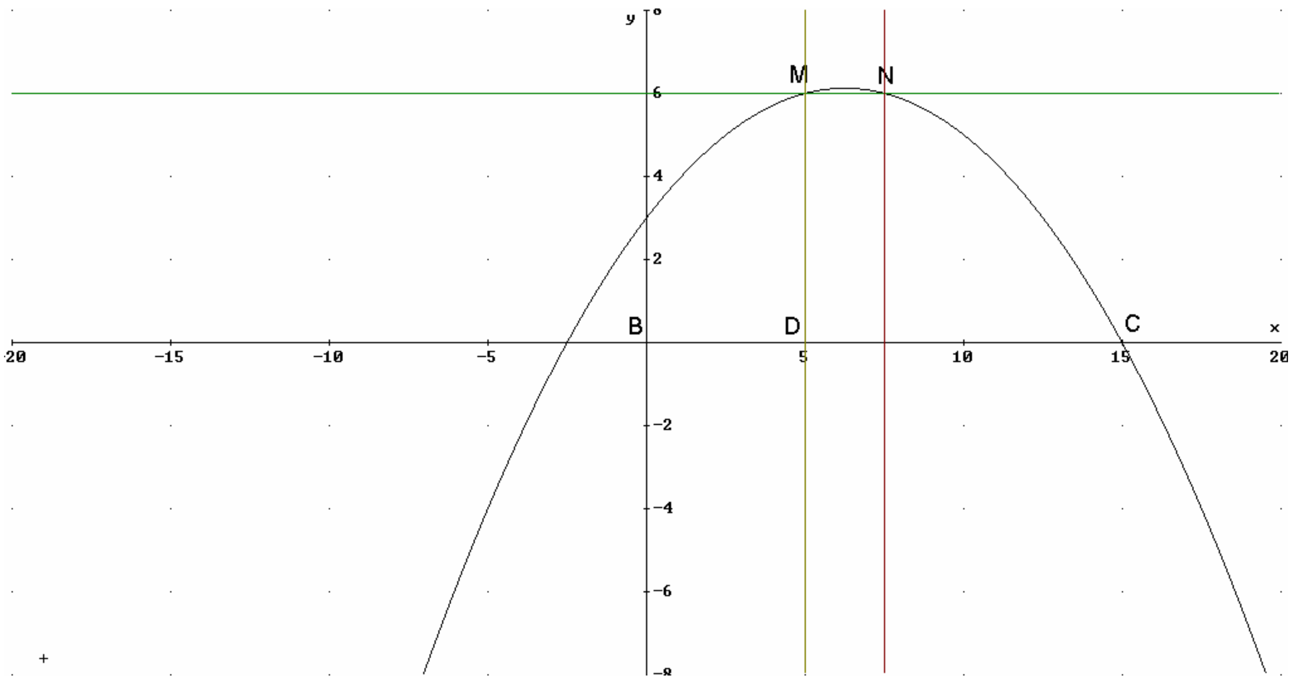
L'equazione della parabola richiesta è del tipo $y = ax^2 + bx + c$

Imponendo la condizione che la parabola passi per i tre punti M, N, C; si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 6 = \frac{225}{4}a + \frac{15}{2}b + c \\ 6 = 25a + 5b + c \\ 0 = 225a + 15b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 225a + 30b + 4c = 24 \\ 25a + 5b + c = 6 \\ 225a + 15b + c = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $\begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

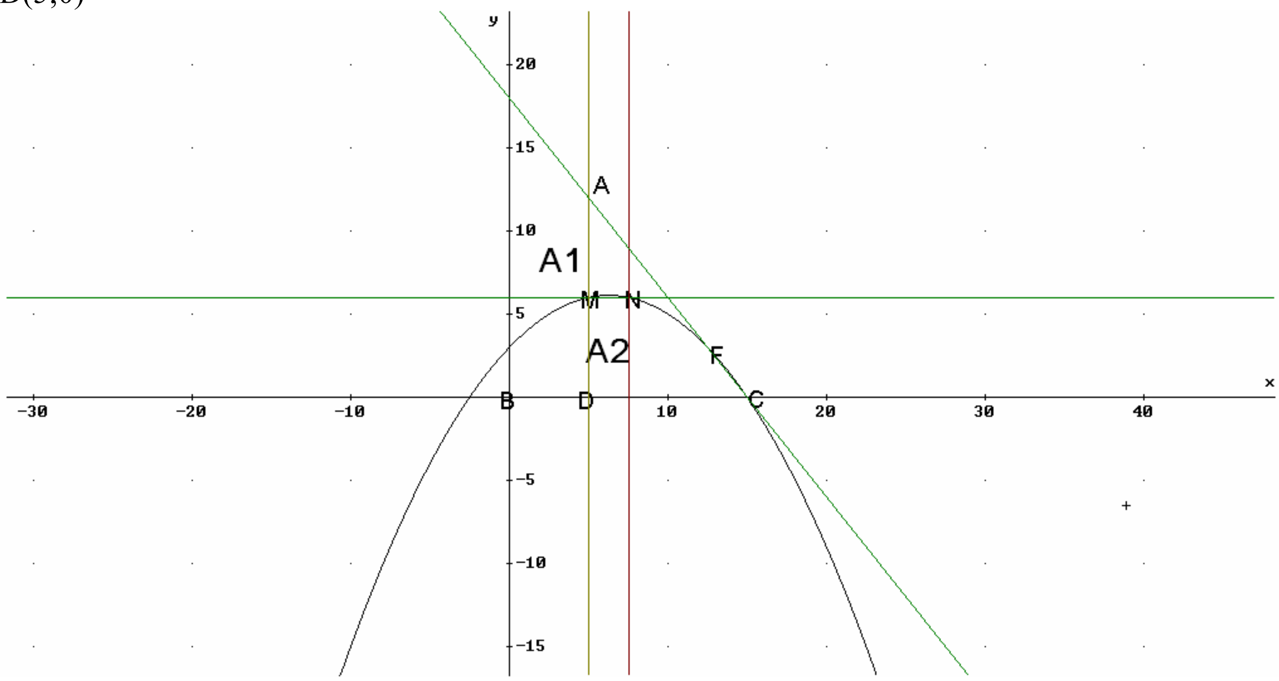
Quindi la parabola richiesta ha equazione: $y = -\frac{2}{25}x^2 + x + 3$



Punto d

Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

A(5;12)
C(15;0)
D(5;0)



La retta AC avrà equazione $\frac{y-0}{12-0}=\frac{x-15}{5-15} \Leftrightarrow y=-\frac{6}{5}(x-15)$

Intersecando tale retta con la parabola si ottiene

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{25}x^2+x+3 \\ y=-\frac{6}{5}x+18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=15 \\ y_1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{25}{2} \\ y_2=3 \end{cases}$$

Cioè F(25/2;3) e C(15;0)

L'area A1 in figura si può calcolare come differenza tra l'area del trapezio AFKD e l'area del trapezoide MFKD.

$$A_{AFKD} = \frac{\overline{AD}+\overline{FK}}{2}\cdot\overline{DK} = \frac{12+3}{2}\cdot\frac{15}{2} = \frac{225}{4}$$

$$A_{MFKD} = \int_5^{\frac{25}{2}} \left(-\frac{2}{25}x^2+x+3\right)dx = \left[-\frac{2}{75}x^3+\frac{x^2}{2}+3x\right]_5^{\frac{25}{2}} = \frac{315}{8}$$

$$A_1 = A_{AFKD} - A_{MFKD} = \frac{225}{4}-\frac{315}{8} = \frac{135}{8}$$

L'area A2 in figura si può calcolare come differenza tra l'area del triangolo ADC e l'area A1

$$A_2 = A_{ADC} - A_1 = \frac{12\cdot 10}{2}-\frac{135}{8} = \frac{315}{8}.$$